Έστω A τυχόν σύνολο. Ορίζουμε μια κλάση $N(A) = \{a \in On : a$ ισοπληθικός με $A\}$. Από Θεώρημα Zermelo υπάρχει μια καλή διάταξη για το σύνολο A, άρα υπάρχει διατακτικός a ισοπληθικός με A. Άρα, $N(A)$ μη-κενή υποκλάση της On, άρα υπάρχει $\in$-ελάχιστο στοιχείο. Αυτό το ελάχιστο ονομάζεται πληθάριθμος ή πληθικός αριθμός. Συμβολισμός: $|A|$ ή $\text{card}A$.

Ορισμός. Ένας διατακτικός αριθμός a λέγεται πληθάριθμος αν δεν υπάρχει διατακτικός β, με $\beta < a$ και β ισοπληθικό με a.

Άσκηση (127) Νδο (i) $\text{card}\,\emptyset = \emptyset$ (ii) Έστω A τυχόν σύνολο $\Rightarrow$

$\Rightarrow \text{card}\{A\} = 1 = \{\{0\}\}$

(iii) Έστωσαν A, B σύνολα με $A \neq B$ τότε $\text{card}\{A, B\} = 2$
$= \{0, 1\}$

Λύση: (i) Το $\emptyset$ είναι το μοναδικό σύνολο που είναι ισοπληθικό με το $\emptyset \Rightarrow \text{card}\,\emptyset = \emptyset$

(ii) $\varphi : \{A\} \to 1$, $\varphi(A) = 0$. Η φ 1-1 και επί. Άρα $\{A\}$ ισοπληθικό με 1.

(iii) $\varphi : \{A, B\} \to 2$, $\varphi(A) = 0 \wedge \varphi(B) = 1$, φ 1-1 και επί $\Rightarrow \{A, B\}$ ισοπληθικό με 2

Θεώρημα 1 (Ασκ 128)

Έστωσαν X, Y τυχόντα σύνολα. Νδο $\text{card}X = \text{card}Y$

$\Longleftrightarrow$ X ισοπληθικό με Y

$(\Rightarrow)$

Απόδειξη: X ισοπληθικό με $\text{card}X$. Όμοια το Y ισοπληθικό

με $\text{card}Y$. Αφού $\text{card}X = \text{card}Y \Rightarrow X$ ισοπληθικό με Y

$(\Leftarrow)$ Αν X ισοπληθικό με Y. Τότε $\text{card}X \in N(Y)$ (1)

Όμοια $\text{card}Y \in N(X)$ (2)

Η (1) σημαίνει ότι $(\text{card}Y, \text{card}X) \in$ ~~E~~ E } Άρα $\text{card}X = \text{card}Y$

Η (2) σημαίνει ότι $(\text{card}X, \text{card}Y) \in E$

(Ασκ 129): Να δειχθεί ότι ένα σύνολο είναι πεπερασμένο αν-ν ο πληθάριθμός του είναι φυσικός αριθμός.

$(\Rightarrow)$

Αποδειξη: Γνωρίζουμε ότι: Το A είναι πεπερασμένο

$\Rightarrow (\exists! n \in \omega) : A \simeq n \Rightarrow N(A) = \{n\} \xRightarrow[\text{ως μοναδικό του } N(A)]{n \text{ ελάχιστο}} n = \text{card}A,\ n \in \omega.$

$(\Leftarrow)$ Έχουμε ότι $\text{card}A = n,\ n \in \omega$

$\Rightarrow n$ ισοπληθικό με A, $n \in \omega \Rightarrow A$ πεπερασμένο

(Ασκ 130): Ας είναι A και B σύνολα, τότε να δειχθεί ότι $\text{card}A \lesssim \text{card}B \Leftrightarrow \exists \varphi$ 1-1 με $\varphi: A \xrightarrow{\text{επι}} B$.

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Γενικά, $\exists g: A \to \text{card}A$ με g 1-1 όμοια

$\exists h: B \to \text{card}B$ με h 1-1

Αν $\text{card}A \leq \text{card}B$

(i) $\text{card}A = \text{card}B$ ή (ii) $\text{card}A < \text{card}B$

(i) Από προηγούμενα αν $\text{card}A = \text{card}B \Rightarrow A$ ισοπληθικό με $B \Rightarrow \exists \varphi: A \to B$, με φ: 1-1 και επι

(ii) Αν $\text{card}A < \text{card}B \Rightarrow \text{card}A \in \text{card}B$

$\xrightarrow{\text{card}B \text{ διαταχτικός}} \text{card}A \subseteq \text{card}B$. Τότε η φ: η οποία
$(A \xrightarrow{g} \text{card}A \xrightarrow{i} \text{card}B \xrightarrow{h^{-1}} B)$

με $\varphi: A \xrightarrow{\text{επι}} B$, 1-1

Θεώρημα (Schröder-Bernstein): Ας είναι A και B σύνολα, αν υπάρχει μια απεικόνιση από το A στο B 1-1 και μια απεικόνιση από το B στο A 1-1, τότε $A \simeq B$.

Απόδειξη: Αν $\exists \varphi_{1-1}: A \to B \Rightarrow \text{card}A \lesssim \text{card}B$. (1)

Και αν $\exists g_{1-1}: B \to A \Rightarrow \text{card}B \lesssim \text{card}A$. (2)

$\Rightarrow \text{card}A = \text{card}B \Longrightarrow A \simeq B$

Κλάση των πληθαρίθμων : C_n . Αφού οι πληθάριθμοι είναι ordinal $\Rightarrow C_n \subseteq O_n$

Θεώρημα (Cantor) : $\forall$ σύνολο A ισχύει ότι $\operatorname{card} A < \operatorname{card} P(A)$

Απόδειξη : • Έστω $A = \emptyset \Rightarrow$ Προφανές

• Αν $A \neq \emptyset$, Θεωρώ $\varphi : A \to P(A)$, $\varphi(x) = \{x\}$, $\forall x \in A$ είναι 1-1 $\Rightarrow \operatorname{card} A \leq \operatorname{card} P(A)$

Έστω ότι : $\operatorname{card} A = \operatorname{card} P(A) \Rightarrow \exists\, \pi_{1\text{-}1} : A \xrightarrow{\text{επί}} P(A)$

$\forall x \in A \Rightarrow$ ~~φ(x)~~ $\pi(x) \in P(A) \Rightarrow \pi(x) \subseteq A$ (αφού A είναι το μεγαλύτερο στοιχείο του $P(A)$)

Ορίζω το σύνολο $B = \{ t \in A : t \notin \pi(t) \} \subseteq A$

Αφού π επί $\Rightarrow (\exists x \in A) : \pi(x) = B \Rightarrow$ • $x \in B \Rightarrow x \notin \pi(x) = B$

• αν $x \notin B \Rightarrow x \in \pi(x) = B$

Άσκηση 133

Η C_n είναι γνήσια κλάση

Απόδειξη: Έστω ότι C_n σύνολο $\Rightarrow \bigcup C_n = X$ σύνολο

$\Rightarrow P(X)$ σύνολο

Ισχυρισμός: $card(P(X)) \leq \cancel{card} X$ X

$card(card(P(X))) = card(P(X))$ $\Rightarrow card(card(P(X))) \leq card X$ (Άτοπο, από Θεώρημα Cantor)

Άσκηση 134: Έστω $2=\{0,1\}$. Να δειχθεί ότι

$\forall X$ σύνολο $card\, P(X) = card(Map(X,2))$

$(Map(X,2) = \{ \varphi \,.\, \varphi : X \to 2 \}$

Λήμμα: $\varphi : A \to B$ με φ 1-1 $\Leftrightarrow \exists g : B \to A : g \circ \varphi = I_A$

φ επί $\Leftrightarrow \exists g . B \to A : \varphi \circ g = I_B$

Θεωρώ $F : P(X) \to Map(X,2)$, $F(A) = \chi_A$, $A \subseteq X$, χ_A

συνάρτηση Dirichlet. Ορίζω επίσης $G : Map(X,2) \to P(X)$

$G(\varphi) = \varphi^{-1}(\{1\})$

$(G \circ F)(A) = G(F(A)) = G(\chi_A) = \chi_A^{-1}\{1\} = A$

$\Rightarrow G \circ F = I_A$

6

Θέλω:

$(F \circ G)(\varphi) = F(G(\varphi)) = F(\varphi^{-1}\{1\}) = \chi_{\varphi^{-1}\{1\}} \overset{*}{=} \varphi$

Θέτω $A_f = \varphi^{-1}(\{1\})$

$* \; x \in A_f \Rightarrow \varphi(x) = 1, \; \forall x \in A_f$

$\forall x \in A_f \Rightarrow \chi_{A_f}(x) = 1$ Άρα $\varphi(x) = \chi_{A_f}(x)$

Άρα $F \circ G(\varphi) = I_{Map(X,2)}$